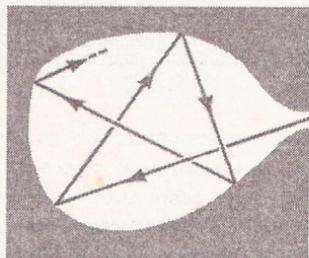


## LA RADIACIÓN TÉRMICA

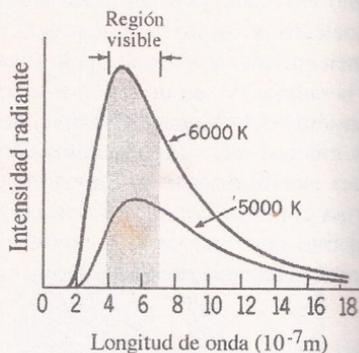
Todos los cuerpos emiten radiación térmica y también la absorben. Si un cuerpo está más caliente que su entorno, su rapidez de emisión excede a la de absorción y el cuerpo tiende a enfriarse hasta alcanzar el equilibrio térmico, en el cual la tasa de emisión y de absorción llegan a ser iguales. Llamaremos *cuerpo negro* a aquel sistema ideal que absorbe toda la radiación incidente y que también es el mejor emisor posible. Una cavidad con un pequeño agujero, se comporta como un cuerpo negro ya que la energía de cualquier radiación que penetra en el agujero, después de múltiples reflexiones en las paredes, termina por ser absorbida por completo.



Una cavidad con un agujero se comporta como un cuerpo negro

## RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

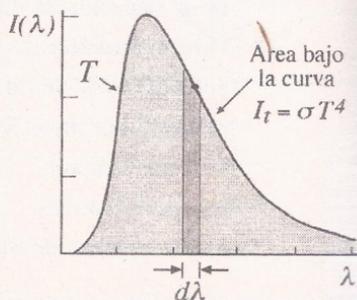
El espectro de una cavidad a una dada temperatura, por ser el más sencillo de estudiar, es el que se toma como una especie de patrón, ya que no depende del material ni de los detalles de las paredes. Solo depende de su temperatura, y la intensidad de la radiación sigue una distribución continua de longitudes de onda mostrando un pico pronunciado. El pico crece conforme aumenta la temperatura y se desplaza hacia la región de longitudes de onda más cortas. Esto explica por qué, el color de un cuerpo va cambiando a medida que lo calentamos: desde la región infrarroja a bajas temperaturas, se va corriendo a la parte visible, hasta que predomina el ultravioleta a las altas temperaturas.



Intensidad de radiación de un cuerpo en función de la longitud de onda

## LEY DE STEPHAN-BOLTZMANN

La radiancia espectral  $I(\lambda)$  expresa como varía la intensidad de la radiación (potencia por unidad de área) con la longitud de onda  $\lambda$ , para una dada temperatura  $T$ . La cantidad  $I(\lambda)d\lambda$  representa la intensidad emitida en el intervalo de longitud de onda  $d\lambda$ . Esto significa que el área total bajo la curva de esta gráfica representa la intensidad total (potencia total por unidad de área) emitida por la cavidad.



De acuerdo a la ley de Stephan-Boltzmann, la intensidad total de la radiación resulta proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta:

$$I_t = \sigma T^4 \text{ W/m}^2$$

$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4 = \text{constante Stephan-Boltzmann.}$

Los objetos reales son menos eficientes que un cuerpo negro, y para expresar esta ineficiencia se usa un factor adimensional  $\epsilon < 1$ , llamada emisividad de la superficie del material. Para un cuerpo negro:  $\epsilon = 1$ .

Ley de Stephan-Boltzmann

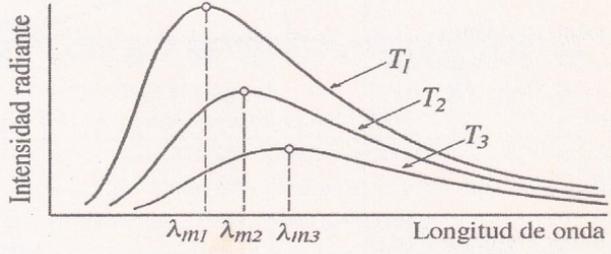
$$I_t = \epsilon \sigma T^4 \text{ W/m}^2$$

$\epsilon = \text{Emisividad}$

**LEY DEL DESPLAZAMIENTO DE WIEN**

En 1893, Wilhelm Wien descubrió que, a medida que la temperatura crece, el pico de la distribución espectral se corre hacia la región de longitudes de onda cortas, de forma tal que la longitud de onda a la cual ocurre el pico,  $\lambda_{max}$ , varía en proporción inversa con la temperatura  $T$

$$\lambda_{max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$$



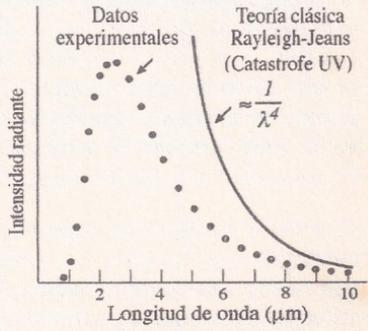
Wilhelm Wien (1864-1928)

Premio Nóbel de física 1911  
Por sus descubrimientos con relación a las leyes que gobiernan la radiación del calor

**TEORÍA CLÁSICA DE RAYLEIGH-JEANS**

Entre los primeros intentos para hallar la función teórica de la radiancia espectral  $I(\lambda, T)$  que concordara con los datos experimentales, están los de Rayleigh y Jeans. Ellos usaron un modelo de osciladores clásicos en el que interviene la determinación de un número de ondas estacionarias contenidas en una cavidad tridimensional y obtuvieron una expresión que, desafortunadamente fracasó porque era una aproximación razonable solamente para la región de longitudes de ondas muy largas:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$



La catástrofe del ultravioleta

La discrepancia para las longitudes de onda cortas era de tal magnitud que se le llamó *la catástrofe ultravioleta*.

## LEY DE RADIACIÓN DE PLANCK

Fue en el año 1900 que Max Planck encontró una fórmula de la radiación que concordaba por completo con los experimentos para todas las longitudes de onda:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \quad \text{W/m}^3$$

Las constantes que aparecen en esta fórmula son:

$$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad (\text{constante de Planck})$$

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{velocidad de la luz})$$

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (\text{constante de Boltzmann})$$

El punto clave en la teoría de Planck es considerar que los átomos que forman las paredes se comportan como osciladores que irradian energía en la cavidad y absorben energía de ella, pero no con valores continuos sino *cuantizados* en unidades discretas:

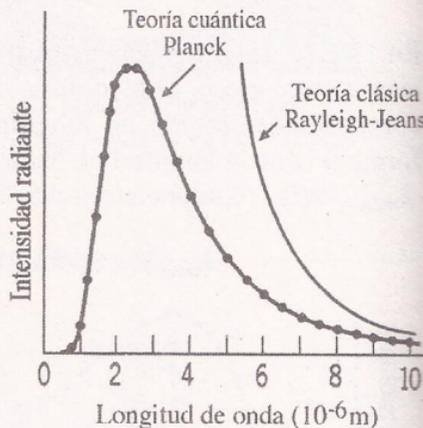
$$E_n = nhf \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

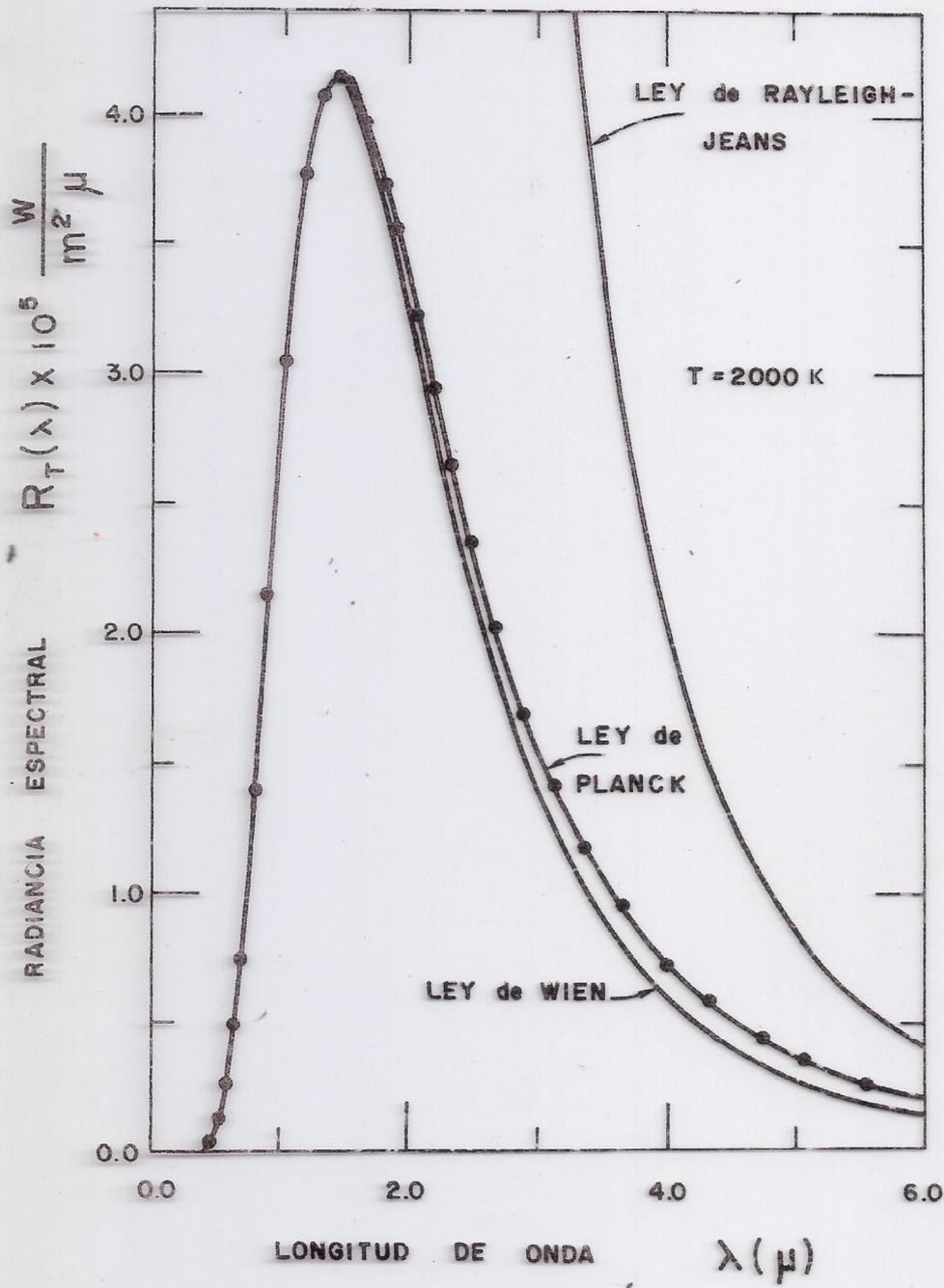
Donde  $n$  es un entero denominado número cuántico. La fórmula de Planck para  $I(\lambda, T)$  se reduce a la expresión clásica de Rayleigh-Jeans cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  (Prob. PR 5.02).



Max Planck (1858-1947)

Premio Nóbel de Física 1918  
Por el descubrimiento del cuanto  
de energía





LEY DE R-J

$$R_T(\lambda) = C \frac{T}{\lambda^4}$$

LEY DE PLANCK

$$R_T(\lambda) = \frac{2\pi^5 h c^2}{15} \frac{1}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right)}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

C = velocidad de la luz

k = constante de Boltzmann

T = Temperatura en K

$$T = T_c + 273$$

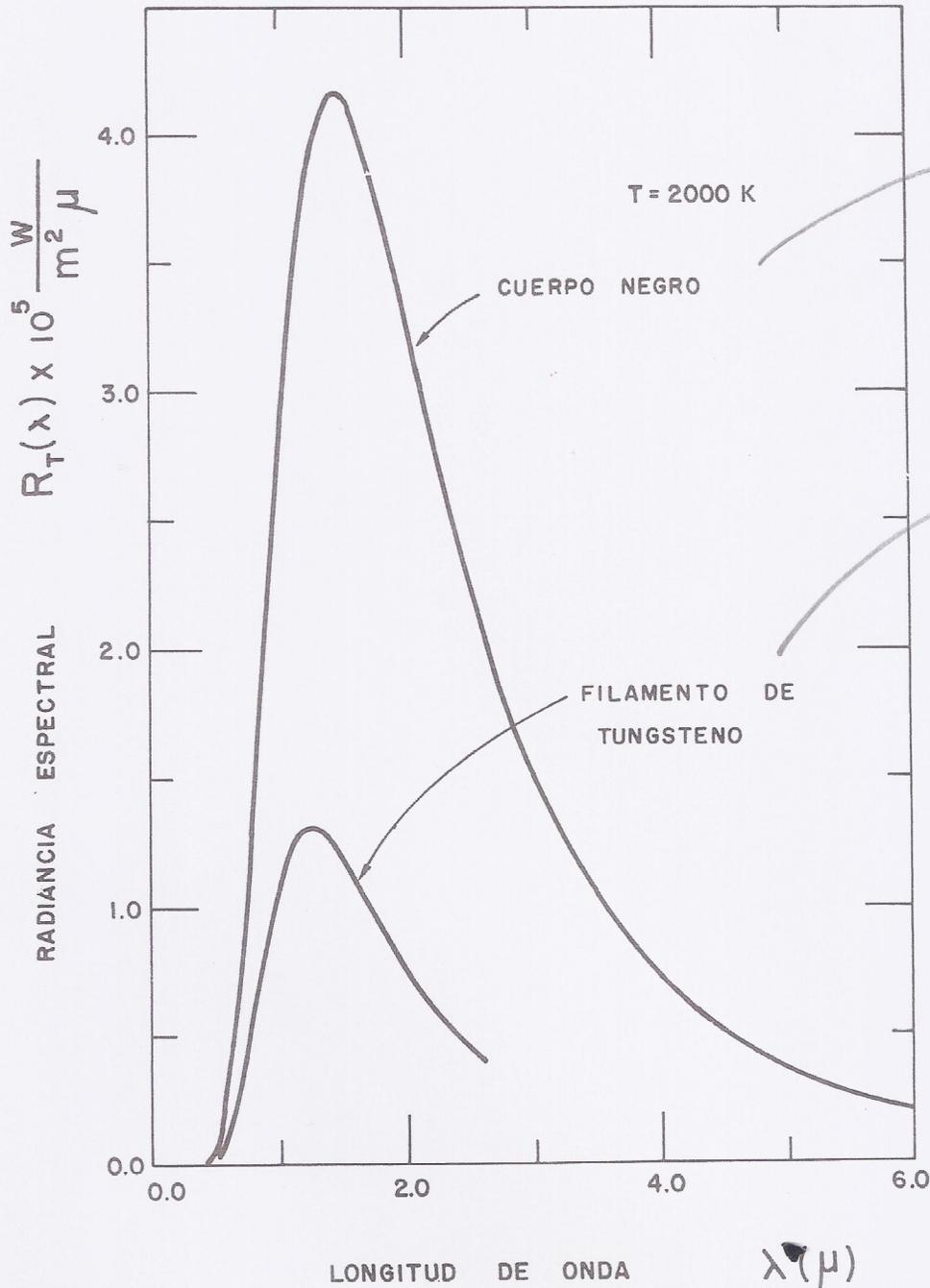
$$C = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

## Comentario importante :

Para un sistema que no es un cuerpo negro, la radiancia  $R_T$  viene dada por

$$R_T = \epsilon \sigma T^4$$

donde  $\epsilon < 1$  se denomina emisividad



LEY Stefan-Boltzmann

$$\rightarrow R_T = \sigma T^4$$

$$\rightarrow R_T = \epsilon \sigma T^4$$

$\epsilon =$  emisividad

$$0 < \epsilon < 1$$

$$R_T = \int R_T(\lambda) d\lambda$$

Demostremos que la leyes de Wien, de Rayleigh-Jeans, de radiación de Stefan-Boltzmann y del desplazamiento de Wien pueden derivarse de la ley de radiación de Planck, ecuación 36.13.

*Ley de Wien:* para valores pequeños de  $\lambda$ , el argumento de la función exponencial en la ley de Planck se vuelve grande, lo que nos permite escribir

$$\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \approx e^{-hc/\lambda k_B T}.$$

Obtenemos entonces una expresión para la ley de Wien como un caso límite de la ley de Planck:

$$\epsilon(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda k_B T},$$

que tiene la misma dependencia de la longitud de onda que la ecuación 36.2, con las constantes definidas ahora como  $a = 2\pi hc^2$  y  $b = hc/\lambda k_B$ .

*Ley de Rayleigh-Jeans:* para valores grandes de  $\lambda$ , el argumento de la función exponencial en la ley de Planck se vuelve pequeño. Podemos ampliar la función exponencial para argumentos pequeños como  $e^x \approx 1 + x$ . En este caso, tenemos entonces  $e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \approx hc / \lambda k_B T$ , y encontramos para valores grandes de la longitud de onda,

$$\epsilon(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left( hc / \lambda k_B T \right)} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4},$$

que es exactamente lo que escribimos para la ley de Rayleigh-Jeans en la ecuación 36.4.

*Ley de desplazamiento de Wien:* para esta ley, necesitamos hallar la longitud de onda para la cual  $\epsilon(\lambda)$  alcanza un máximo; es decir, necesitamos tomar la derivada con respecto a la longitud de onda y hallar la raíz. La derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)} \right) \\ &= -\frac{10\pi hc^2}{\lambda^6 \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)} + \frac{2\pi h^2 c^3 e^{hc/\lambda k_B T}}{\lambda^7 \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)^2 k_B T} \\ &= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^7 \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)^2 k_B T} \left( -5\lambda k_B T \left( e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right) + h c e^{hc/\lambda k_B T} \right). \end{aligned}$$

Excepto para el caso sin interés de  $T \rightarrow \infty$ , esta expresión puede ser cero sólo si el numerador es cero. Por lo tanto, necesitamos resolver

$$-5\lambda_m k_B T \left( e^{hc/\lambda_m k_B T} - 1 \right) + h c e^{hc/\lambda_m k_B T} = 0,$$

donde  $\lambda_m$  es el valor de la longitud de onda para la cual la ley de radiación de Planck tiene su máximo. Si sustituimos  $u = hc/\lambda_m k_B T$ , entonces esta ecuación se reduce a

$$5 \left( e^u - 1 \right) = u e^u \Rightarrow 5 - 5e^{-u} = u.$$

Esta ecuación se puede resolver por simple iteración; por ejemplo, por medio de una hoja de cálculo. La raíz trivial es  $u = 0$ , pero no estamos interesados en esta solución, que corresponde a una longitud de onda infinita. Por lo tanto, empezamos nuestra iteración en un valor finito, por ejemplo 1, y calculamos  $5 - 5e^{-1} = 3.1606$ . Entonces usamos este nuevo valor e insertamos de nuevo, encontrando  $5 - 5e^{-3.1606} = 4.7880$ , y así sucesivamente. Encontrará que muy pronto alcanzará la convergencia y obtendrá

$$u = \frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4.9651 \Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{k_B 4.9651}.$$

Al usar los valores de las constantes  $h, c, k_B$ , encontramos entonces que

$$\lambda_m T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K m},$$

que concuerda por completo con el valor hallado experimentalmente de la ecuación 36.3.

*Ley de Stefan-Boltzmann:* para obtener la intensidad total irradiada,  $I$ , necesitamos integrar la ley de radiación de Planck sobre la longitud de onda, desde cero hasta infinito. Encontramos que:

$$I = \int_0^{\infty} \epsilon(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} d\lambda = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15h^3 c^2} T^4.$$

Al insertar los valores para la constante de Planck, la constante de Boltzmann y la velocidad de la luz, podemos verificar que la constante de Stefan-Boltzmann está, de hecho, dada por

$$\sigma = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15h^3 c^2} = 5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

De esta manera, vemos que la ley de radiación deducida por Planck contiene las leyes de radiación previamente conocidas como casos especiales, según ilustra la figura 36.5.

La ley de Planck es congruente con la ley de Wien para longitudes de onda cortas y concuerda con la ley de Rayleigh-Jeans en longitudes de onda largas. Este éxito resultó en la aceptación inmediata de la ley de radiación de Planck para cuerpos negros, aun cuando se basa en la suposición

radical de estados de energía cuantizados. En particular, uno puede ver de la deducción 36.1 cómo se resuelve la hipótesis cuántica y evita la catástrofe ultravioleta clásica analizada antes (vea la ecuación 36.4): para una determinada frecuencia  $f$ , la energía  $hf$  es necesaria para crear un fotón. A medida que se incrementa la frecuencia, se vuelve cada vez menos probable que el sistema pueda suministrar la energía necesaria para la creación de un fotón. Esto da lugar a un corte a frecuencias altas y, por lo tanto, a longitudes de onda bajas, en concordancia con las observaciones. Así, la evitación observada de la catástrofe ultravioleta es una consecuencia directa de la naturaleza cuántica de la luz.

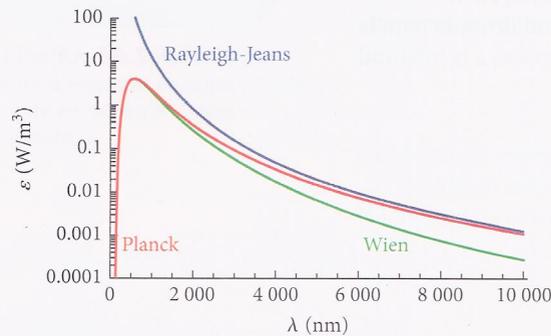
El ejemplo más asombroso de un espectro de cuerpo negro se obtiene observando la radiación de fondo cósmica. Esta radiación es un remanente del Big Bang y es extraordinariamente uniforme en todo el universo. La misión del satélite COBE en 1990 y más recientemente la misión del satélite WMAP han demostrado esto de modo sorprendentemente detallado. Como indica la figura 36.6, la misión COBE halló que la radiación de fondo cósmica es la de un cuerpo negro perfecto a una temperatura de  $2.725 \pm 0.001 \text{ K}$ ; es decir, todo el universo es un radiador de cuerpo negro perfecto. George Smoot y John Mather, los líderes del equipo COBE, recibieron el Premio Nobel de Física 2006 por los logros de esta misión de satélite. (Un análisis más detallado de la radiación de fondo cósmica se presenta en el capítulo 40.)

Así como la radiación de cuerpo negro se usó para medir la temperatura del universo, la radiación de cuerpo negro se puede usar para medir la temperatura de objetos sin tocarlos físicamente. Si un objeto está suficientemente caliente, irradiará fotones en el intervalo visible, como se analizó al comienzo de esta sección. Por ejemplo, la temperatura del hierro fundido en una fábrica de acero se puede medir analizando fotones irradiados del hierro fundido al rojo vivo. Los objetos cercanos a la temperatura ambiente irradian fotones principalmente en el intervalo infrarrojo. Los termómetros infrarrojos modernos se pueden usar para medir la temperatura de una persona observando la radiación infrarroja del tímpano de la persona. Los termómetros infrarrojos se usan también para medir la temperatura de alimentos y componentes eléctricos.

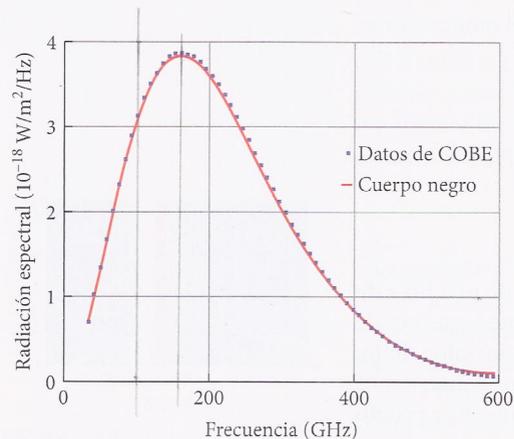
### 36.1 Ejercicio en clase:

El espectro visible de luz se extiende desde aproximadamente 380 nm (violeta-azul) hasta 780 nm (rojo). ¿Cuál es el intervalo correspondiente de energías de fotón en unidades de electrón-voltios?

- 1.59 eV a 3.26 eV
- $2.54 \cdot 10^{-19}$  eV a  $5.23 \cdot 10^{-19}$  eV
- $0.38 \cdot 10^{15}$  eV a  $0.78 \cdot 10^{15}$  eV
- 190 eV a 390 eV



**FIGURA 36.5** Comparación de la ley de radiación de Planck, la ley de radiación de Rayleigh-Jeans y la ley de Wien (usando las constantes de la deducción 36.1) para  $T = 5000 \text{ K}$ .



**FIGURA 36.6** Datos de la radiación espectral de fotones de fondo de microondas como una función de la frecuencia. Los cuadros azules indican datos obtenidos por el satélite COBE, mientras que la curva roja es un mejor ajuste del espectro de Planck a una temperatura de  $2.725 \text{ K}$ .

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu) \quad (1-4)$$

Hence, the radiation inside a cavity whose walls are at temperature  $T$  has the same character as the radiation emitted by the surface of a blackbody at temperature  $T$ . It is convenient experimentally to produce a blackbody spectrum by means of a cavity in a heated body with a hole to the outside, and it is convenient in theoretical work to study blackbody radiation by analyzing the cavity radiation because it is possible to apply very general arguments to predict the properties of cavity radiation.

**Example 1-1.** (a) Since  $\lambda\nu = c$ , the constant velocity of light, Wien's displacement law (1-3a) can also be put in the form

$$\lambda_{\max} T = \text{const} \quad (1-3b)$$

where  $\lambda_{\max}$  is the wavelength at which the spectral radiancy has its maximum value for a particular temperature  $T$ . The experimentally determined value of Wien's constant is  $2.898 \times 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K}$ . If we assume that stellar surfaces behave like blackbodies we can get a good estimate of their temperature by measuring  $\lambda_{\max}$ . For the sun  $\lambda_{\max} = 5100 \text{ \AA}$ , whereas for the North Star  $\lambda_{\max} = 3500 \text{ \AA}$ . Find the surface temperature of these stars. (One *angstrom* =  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ .)

For the sun,  $T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K} / 5100 \times 10^{-10} \text{ m} = 5700^\circ\text{K}$ . For the North Star,  $T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K} / 3500 \times 10^{-10} \text{ m} = 8300^\circ\text{K}$ .

At  $5700^\circ\text{K}$  the sun's surface is near the temperature at which the greatest part of its radiation lies within the visible region of the spectrum. This suggests that over the ages of human evolution our eyes have adapted to the sun to become most sensitive to those wavelengths which it radiates most intensely.

(b) Using Stefan's law, (1-2), and the temperatures just obtained, determine the power radiated from  $1 \text{ cm}^2$  of stellar surface.

For the sun

$$\begin{aligned} R_T &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{K}^4 \times (5700^\circ\text{K})^4 \\ &= 5.90 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \simeq 6000 \text{ W/cm}^2 \end{aligned}$$

For the North Star

$$\begin{aligned} R_T &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{-}^\circ\text{K}^4 \times (8300^\circ\text{K})^4 \\ &= 2.71 \times 10^8 \text{ W/m}^2 \simeq 27,000 \text{ W/cm}^2 \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

**Example 1-2.** Assume we have two small opaque bodies a large distance from one another supported by fine threads in a large evacuated enclosure whose walls are opaque and kept at a constant temperature. In such a case the bodies and walls can exchange energy only by means of radiation. Let  $e$  represent the rate of emission of radiant energy by a body and let  $a$  represent the rate of absorption of radiant energy by a body. Show that at equilibrium

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = 1 \quad (1-5)$$

This relation, (1-5), is known as *Kirchhoff's law for radiation*.

The equilibrium state is one of constant temperature throughout the enclosed system, and in that state the emission rate necessarily equals the absorption rate for each body. Hence

$$e_1 = a_1 \quad \text{and} \quad e_2 = a_2$$

Therefore

$$\frac{e_1}{a_1} = 1 = \frac{e_2}{a_2}$$

If one body, say body 2, is a blackbody, then  $a_2 > a_1$  because a blackbody is a better absorber than a non-blackbody. Hence, it follows from (1-5) that  $e_2 > e_1$ . The observed fact that good absorbers are also good emitters is thus predicted by Kirchhoff's law. 